Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z ALGEBRY

ELEMENTY LINEÁRNÍ ALGEBRY

1999/2000 **CIFRIK**

Základní pojmy

Binární relace R

Binární relace R mezi množinami A, B je libovolná podmnožina R kartézského součinu množin A, B. Pro dva prvky $a \in A, b \in B$ takové, že $(a,b) \in R$, píšeme též aRb a čteme „(prvek) a je v relaci R s (prvkem) b“.

Binární relace je:

- reflexivní, jestliže platí $\forall x \in M : xRx$
- ireflexivní, jestliže platí $\forall x \in M : non\, xRx$
- symetrická, jestliže platí $\forall x, y \in M : (xRy \Rightarrow yRx)$
- antisymetrická, jestliže platí $\forall x, y \in M : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
- tranzitivní, jestliže platí $\forall x, y, z \in M : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$
- konektivní, jestliže platí $\forall x, y \in M : (xRy \vee x = y \vee yRx)$

Binární relace U na množině M se nazývá

- (neostré) uspořádání na množině M, je-li reflexivní, antisymetrická a tranzitivní
- ostré uspořádání na množině M, je-li ireflexivní, antisymetrická a tranzitivní
- (ostré či neostré) lineární uspořádání na množině M, jestliže je (ostrým či neostrým) uspořádáním na M a je navíc konektivní.

Příklad 1.

Je dána množina $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

a) Určeme výčtem prvků binární relaci $R = ([x, y] \in A^2 ; x / y \wedge x < y \wedge x > 1)$

b) Určeme 1. a 2. obor binární relace R.

c) Určeme výčtem prvků relaci R^{-1} doplňkovou k R.

---

ad a) $R = \{ [2,4], [2,6], [2,8], [3,6], [4,8] \}$

ad b) první obor $O_1(R) = \{2,3,4\}$, druhý obor $O_2(R) = \{4,6,8\}$

ad c) $\forall [x, y] \in A^2 ; [x, y] \in R^{-1} \Leftrightarrow [y, x] \in R$

To znamená, že relaci R^{-1} vytvoříme z relace R záměnou pořadí složek ve všech uspořádaných dvojicích relace R. Tedy

$$R^{-1} = \{ [4,2], [6,2], [8,2], [6,3], [8,4] \}$$

Příklad 2.

Nechť M je množina přímek v rovině. Definujme relaci R takto: pRq znamená, že přímka p nemá společný bod s přímkou q. Které vlastnosti má relace R?

Relace R není reflexivní, protože přímka p má sama se sebou dokonce nekonečně mnoho společných bodů. Relace R je symetrická, protože zřejmě p má společný bod s q, právě když q má společný bod s p. Relace není tranzitivní. Kdyby byla tranzitivní, znamenalo by to, že nemá-li p společný bod s q a současně nemá q společný bod s r, pak p nemá společný bod s r. Zvolme speciálně $p \neq q, pRq$, tj. $p \neq q$, $p \parallel q$, a $r = p$. Pak zřejmě pRq, qRp, ale p není v relaci R sama se sebou.

Zobrazení

Def.I. Zobrazení (funkce) f množiny A do množiny B (označení $f: A \to B$) je jakákoli relace mezi množinami A, B taková, že pro každé $a \in A$ existuje právě jeden prvek $b \in B$ takový, že $(a,b) \in f$. Prvek b nazýváme hodnotou zobrazení f v bodě a (příp. obrazem prvku a při zobrazení f) a píšeme stručně $b = f(a)$. Prvek a nazýváme vzorem prvku b při zobrazení f.

Definiční obor $D(f)$ zobrazení f je množina $D(f) = \{x \in A; \exists b \in B : b = f(x)\}$.
Obor hodnot $H(f)$ zobrazení f je množina $H(f) = \{y \in B; \exists x \in A : y = f(x)\}$

Def.II. Zobrazením z množiny A do množiny B rozumíme takovou podmnožinu f množiny $A \times B$, pro kterou platí:

$$(\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in A)\{[(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f] \Rightarrow y_1 = y_2\}.$$

Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá

- prosté (**injekce**), jestliže pro libovolná $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: Je-li $x_1 \neq x_2$, je $f(x_1) \neq f(x_2)$ (tj. každým dvěma různým vzorům přísluší dva různé obrazy);
- na (**surjekce**), je-li $H(f) = B$;
- vzájemně jednoznačné (**bijekce**), jestliže je zároveň prosté a na (tj. $D(f) = A,\ H(f) = B$ a f je prosté).

Binární operace

(Binární) operací ☺ na množině M rozumíme každé zobrazení (celého) kartézského součinu $M \times M$ do M. Není-li definičním oborem celá množina $M \times M$ hovoříme o parciální nebo též částečné operaci.

Říkáme, že operace ☺ na množině M

- je komutativní, jestliže $(\forall a, b \in M)\ a ☺ b = b ☺ a$
- je asociativní, jestliže $(\forall a, b, c \in M)\ (a ☺ b) ☺ c = a ☺ (b ☺ c)$,
- má neutrální prvek n, jestliže $(\exists n \in M)(\forall c \in M)\ n ☺ c = c ☺ n = c$
- má agresivní prvek a, jestliže $(\exists a \in M)(\forall c \in M)\ a ☺ c = c ☺ a = a$
- má inverzní prvek c^{-1} ke každému prvku c, jestliže existuje neutrální prvek n a platí $(\forall c \in M)(\exists c^{-1} \in M)\ c ☺ c^{-1} = c^{-1} ☺ c = n$.

Grupa

Grupou rozumíme uspořádanou dvojici (G, ☺), kde G je neprázdná množina, tzv. nosič grupy G, a ☺ je binární operace na G, která je asociativní, má neutrální prvek a ke každému prvku i prvek inverzní. Je-li navíc operace ☺ komutativní, hovoříme o komutativní (neboli Abelově) grupě.

Číselné těleso

Číselným tělesem rozumíme uspořádanou trojici $(T,+,\cdot)$, kde T je podmnožina množiny komplexních čísel C taková, že $0 \in T, 1 \in T$ a platí:

$(\forall x, y \in T)(x+y \in T \wedge x.y \in T)$ (je uzavřená na sčítání a násobení)

$(\forall x \in T)(-1).x \in T$ (je uzavřená na opačné prvky)

$(\forall x \in T)(x \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \in T)$ (je uzavřená na převrácené hodnoty nenulových prvků)

Obecně číselným tělesem rozumíme každou uspořádanou trojici $(T,*,\circ)$, kde T je aspoň dvouprvková množina; $*,\circ$ jsou operace na T a platí $(x,y,z \in T)$:

$$x*y = y*x \qquad x\circ y = y\circ x$$

$$(x*y)*z = x*(y*z) \qquad (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$$

$$(\exists 0 \in T)(\forall x)\ 0*x = x \qquad (\exists 1 \in T)(\forall x)\ 1\circ x = x$$

$$(\forall x)(\exists -x \in T)\ x*(-x) = 0 \qquad (\forall x \neq 0)(\exists x^{-1} \in T)\ x\circ x^{-1} = 1$$

$(x*y)\circ z = (x\circ z)*(y\circ z)$ (distributivita operace $\circ$ vzhledem k operaci $*$)

Aritmetický vektor

Nechť T je těleso, n přirozené číslo. Uspořádanou n-tici $\underline{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, kde $x_i \in T$, $i = 1,2,...,n$, nazveme n-rozměrným aritmetickým vektorem nad tělesem T. Prvek x_i nazýváme i-tým členem aritmetického vektoru $\underline{x}$. Množinu všech n-rozměrných aritmetických vektorů nad T budeme značit $V_n(T)$.

Rovnost dvou aritmetických vektorů

Dva vektory $\underline{x}$, $\underline{y}$ se sobě rovnají, právě když $x_i = y_i$, $i = 1,2,...,n$.

Součet dvou aritmetických vektorů

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

α-násobek

$$\alpha\underline{x} = \{\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n\}$$

Nulový aritmetický vektor

$\underline{o} = (0,0,...,0)$, tj. všechny členy jsou rovny nulovému prvku tělesa T.

Lineární kombinace

Nechť $a_1, a_2, ..., a_k$ jsou vektory z $V_n(T)$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ prvky z T. Aritmetický vektor

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + ... + \alpha_k \underline{a}_k$$

nazýváme lineární kombinací aritmetických vektorů $a_1, a_2, ..., a_k$ s koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

triviální lineární kombinací - nazýváme lineární kombinaci, která má všechny koeficienty rovné nulovému prvku 0 z tělesa T

netriviální lineární kombinaci – jestliže je aspoň jeden koeficient různý od 0

nulová lineární kombinace – jestliže pro prvky $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in T$ a vektory $a_1, a_2, ..., a_k \in V(T)$ platí: $\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + ... + \alpha_k \underline{a}_k = \underline{o}$.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

závislé – existuje nulová netriviální lineární kombinace
nezávislé – existuje pouze triviální lineární kombinace

Příklad 3.

Rozhodněme, zda následující vektory z aritmetického vektorového prostoru R^3 nad R jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

$$\underline{u}=(3,2,7),\quad \underline{v}=(1,1,1),\quad \underline{w}=(2,0,3)$$

Rozhodnout, zda vektory $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ jsou lineárně závislé resp. nezávislé, znamená rozhodnout, zda rovnice $c_1\underline{u}+c_2\underline{v}+c_3\underline{w}=\underline{0}$ má nenulové resp. pouze nulové řešení. Tuto rovnici lze přepsat na soustavu

$$\begin{aligned} 3c_1+c_2+2c_3&=0\\ 2c_1+c_2\quad\;\;&=0\,.\\ 7c_1+c_2+3c_3&=0 \end{aligned}$$

Tato soustava má pouze triviální řešení $c_1=c_2=c_3=0$, takže vektory $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ jsou LN.

Pozn. O nezávislosti vektorů $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ lze rozhodnout též na základě výpočtu determinantu matice soustavy. (Soustava rovnic má pouze triviální řešení právě tehdy, když determinant matice soustavy není 0).

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=9+4+0-14-0-6=-7\neq 0 \quad \Rightarrow \textit{lineárně nezávislé}$$

Příklad 4.

Určeme reálné číslo b tak, aby vektory $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ z aritmetického vektorového prostoru R^3 nad R byly lineárně závislé.

$$\underline{u}=(1,2,3),\quad \underline{v}=(3,1,4),\quad \underline{w}=(b,4,11)$$

Aby vektory $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ byly lineárně závislé, musí existovat čísla $c_1,c_2,c_3\in R$, z nichž aspoň jedno je nenulové, a platí $c_1\underline{u}+c_2\underline{v}+c_3\underline{w}=0$. Zkoumáme tedy, pro které hodnoty parametru b má soustava

$$\begin{aligned} c_1+3c_2+b\cdot c_3&=0\\ 2c_1+\;\;c_2+4c_3&=0\\ 3c_1+4c_2+11c_3&=0 \end{aligned}$$

nulové řešení.

Odečtením 1. a 2. rovnice od 3. rovnice dostaneme

$$(7-b)\,c_3=0\,.$$

Snadno zjistíme, že pro $b\neq 7$ je $c_3=c_1=c_2=0$ a pro $b=7$ má soustava nekonečně mnoho řešení, tedy pro $b=7$ jsou vektory $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ lineárně závislé.

Příklad 5.

Určeme všechny hodnoty $a \in R$, pro které je vektor $\underline{v}$ lineární kombinací vektorů $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$.

$$\underline{u}_1 = (3,2,5), \quad \underline{u}_2 = (2,4,7), \quad \underline{u}_3 = (5,6,a), \quad \underline{v} = (1,3,5)$$

Vektor $\underline{v}$ je lineární kombinací vektorů $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ právě tehdy, když existují $c_1, c_2, c_3 \in R$ taková, že $\underline{v} = c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2 + c_3\underline{u}_3$, tzn., když soustava rovnic

$$\begin{aligned} 3c_1 + 2c_2 + 5c_3 &= 1 \\ 2c_1 + 4c_2 + 6c_3 &= 3 \\ 5c_1 + 7c_2 + a \cdot c_3 &= 5 \end{aligned}$$

má aspoň jedno řešení.

Podle Frobeinovy věty je tato soustava řešitelná právě tehdy, když je hodnost matice soustavy

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & a \end{pmatrix}$$

rovna hodnosti rozšířené matice soustavy

$$\underline{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & a & 5 \end{array}\right).$$

Matici $\underline{A}'$ upravíme na trojúhelníkový tvar:

$$\underline{A}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & a & 5 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & a-11 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & a-11 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & a-12 & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Vidíme, že pro $a \neq 12$ je $h(\underline{A}) = h(\underline{A}') = 3$, tedy soustava je řešitelná (protože hodnost matice soustavy je rovna počtu neznámých, je toto řešení právě jedno). To znamená, že vektor $\underline{v}$ je lineární kombinací vektorů $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ pro libovolné reálné $a \neq 12$.

Pamatujme:

Neexistuje ani jedna oblast matematiky, a to ať je jakkoli abstraktní, která by se jednou nedala aplikovat na jevy reálného světa.

N.I. Lobačevskij

Matice

Nechť T je těleso. Obdélníkovou tabulku prvků z T sestavených do m řádků a n sloupců nazýváme maticí typu (m,n) nad tělesem T. Je-li $m=n$, hovoříme o čtvercové matici n-tého řádu.

Matice $\underline{A}$ přiřazuje každé dvojici $(i,k), i=1,2,\dots,m, \quad k=1,2,\dots,n$ prvek z T, který označujeme a_{ik} a nazýváme prvkem matice $\underline{A}$ v i-tém řádku a k-tém sloupci. Matici $\underline{A}$ zapisujeme

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

nebo zkráceně

$$\underline{A}=(a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}}.$$

pokud je z textu známo m,n, píšeme pouze $\underline{A}=(a_{ik})$. Aritmetický vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ se nazývá i-tý řádek, aritmetický vektor $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})$ k-tý sloupec matice $\underline{A}$.

Diagonála a diagonální matice

Nechť $\underline{A}=(a_{ik})$ je matice typu (m,n). Aritmetický vektor $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr})$, kde $r=\min(m,n)$, se nazývá (hlavní) diagonála matice $\underline{A}$. Prvky a_{ii}, $i=1,2,\dots,r$, se nazývají diagonální prvky. Matice $\underline{A}=(a_{ik})$, která má mimo hlavní diagonálu samé 0, tj. $a_{ik}=0$ pro $i\neq k$, se nazývá diagonální.

Jednotková matice

Jednotkovou matici $\underline{A}$ n-tého řádu nazýváme diagonální matici $\underline{E}=(e_{ik})$ n-tého řádu, pro níž platí $e_{ii}=1$ pro všechna $i=1,2,\dots,n$. (Jednotková matice stupně n je čtvercová matice $\underline{E}=(e_{ik})$ stupně n mající v hlavní diagonále všude prvek 1 a všude jinde prvek 0.)

Transponovaná matice

Transponovaná matice k matici $\underline{A}=(a_{ik})$ typu (m,n) je matice $\underline{B}^T=(b_{ik})$ typu (n,m), pro kterou platí $a_{ik}=b_{ik}$, $\quad i=1,2,\dots,m,\ k=1,2,\dots,n$. (Transponovanou matici $\underline{A}^T$ dostaneme z matice $\underline{A}$ tak, že vzájemně vyměníme řádky a sloupce v matici $\underline{A}$).

Příklad 6.

Určeme transponované matice k maticím

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}^T=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Matice symetrická a antisymetrická

Matice $\underline{A}$ se nazývá symetrická (antisymetrická), jestliže platí

$$\underline{A} = \underline{A}^T \; \left(\underline{A} = -\underline{A}^T\right).$$

Trojúhelníková matice

zobecněná: právě když matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m,n)

a má pouze nenulové řádky,

b jsou-li a_{ik}, a_{rs} vedoucí prvky takové, že $i < r$, pak $k < s$.

redukovaná: právě když je u zobecněné trojúhelníková matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m,n)

a každý vedoucí prvek je roven 1,

b nad každým vedoucím prvkem jsou ve sloupci pouze 0.

Čtvercové matice: regulární × singulární

Čtvercovou matici $\underline{A}$ n-tého řádu nazveme **regulární** jestliže $hod\,\underline{A} = n$,

čtvercovou matici $\underline{A}$ n-tého řádu nazveme **singulární** jestliže $hod\,\underline{A} < n$.

(Regulární maticí nazýváme čtvercovou matici n-tého řádu, jejíž hodnost je rovna n.
V opačném případě mluvíme o singulární matici.)

Matice $\underline{A}$ je regulární je-li determinant $\det \underline{A} \neq 0$. K regulární matici existuje inverzní matice.

Řádkový prostor

Řádkovým prostorem matice $\underline{A}$ rozumíme podprostor vektorového prostoru $V_n(T)$ generovaný všemi řádky matice $\underline{A}$.

Hodnost matice

Hodností matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (n,m) nazýváme dimenzi jejího řádkového prostoru.

Elementární úpravy

Elementární řádkové (sloupcové) úpravy:

a změna pořadí řádků (resp. sloupců) matice $\underline{A}$

b nahrazení řádku (resp. sloupce) matice $\underline{A}$ jeho α-násobkem, kde $\alpha \in T, \alpha \neq 0$.

c nahrazení řádku (resp. sloupce) matice $\underline{A}$ jeho součtem s α-násobkem, $\alpha \in T$, jiného řádku matice $\underline{A}$.

d vynechání řádku (resp. sloupce), který je lineární kombinací ostatních řádků (resp. sloupců)

Dvě matice jsou **ekvivalentní**, právě když lze jednu z druhé získat konečným počtem elementárních úprav řádků.

Příklad 7.

Určeme hodnost matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ 11 & -4 & 13 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí elementárních řádkových a sloupcových úprav převedeme matici $\underline{A}$ na ekvivalentní zobecněnou trojúhelníkovou matici:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \\ 11 & -4 & 13 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ -4 & 11 & 13 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 11 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -34 & -11 \\ 0 & 0 & -34 & -11 \end{pmatrix} \approx \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -34 & -11 \end{pmatrix}}}$$

Hodnost matice $\underline{A}$ je 3.

Rovnost matic

Matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m,n) a $\underline{B} = (b_{ik})$ typu (r,s) se sobě rovnají, právě když platí: $m = r$, $n = s$, $a_{ik} = b_{ik}$ pro všechna $i = 1,2,\dots,m$, $k = 1,2,\dots,n$.

Součet matic

Nechť jsou dány matice $\underline{A} = (a_{ik})$, $\underline{B} = (b_{ik})$ téhož typu (m,n) nad týmž tělesem T. Součtem matic $\underline{A}$ a $\underline{B}$ nazýváme matici $\underline{C} = (c_{ik})$ typu (m,n) definovanou předpisem

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik},\ i = 1,2,\dots,m,\ k = 1,2,\dots,n.$$

Píšeme $\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$.

Platí:

$\underline{a}$ $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

$\underline{b}$ $\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$

$\underline{c}$ $\underline{A} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{A} = \underline{A}$

$\underline{d}$ $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$

$\underline{e}$ $-\underline{A} = (-a_{ik})$, kde $-a_{ik}$ je opačný prvek k a_{ik} v tělese T, $-\underline{A}$ je matice opačná k matici $\underline{A}$, tj. platí $-\underline{A} + \underline{A} = \underline{0}$.

(Z a,b,c,e plyne, že množina matic daného typu (m,n) nad tělesem T tvoří komutativní grupu.)

Příklad 8.

Sečtěme matice $\underline{A}$ a $\underline{B}$.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} + \underline{B} = \begin{pmatrix} 2+1 & 4+2 & -1+3 \\ 5+0 & -2-2 & -3+1 \\ 4-3 & 0+6 & 1-3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & -2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}}}$$

α-násobek matice

Nechť $\underline{A}=(a_{ik})$ je matice typu (m,n) nad tělesem T. Součinem prvků $\alpha \in T$ a matice $\underline{A}$ nazýváme matici $\underline{C}=(c_{ik})$ typu (m,n) definovanou předpisem

$$c_{ik}=\alpha \cdot a_{ik},\ i=1,2,....,m,\ k=1,2,...,n.$$

Píšeme $\underline{C}=\alpha \cdot \underline{A}$.

Příklad 9.

Určeme matici $\underline{D}=-2\underline{A}+3\underline{B}$.

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \underline{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{D}=\begin{pmatrix} -2.2 & -2.4 & -2.(-1) \\ -2.5 & -2.(-2) & -2.(-3) \\ -2.4 & -2.0 & -2.1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 & 3.3 \\ 3.0 & 3.(-2) & 3.1 \\ 3.(-3) & 3.6 & 3.(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & -8 & 2 \\ -10 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -6 & 3 \\ -9 & 18 & -9 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 11 \\ -10 & -2 & 9 \\ -17 & 18 & -11 \end{pmatrix}}}$$

Příklad 10.

Vypočítejme matici $\underline{X}$ z rovnice

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot \underline{X}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Rovnice je ve tvaru $\underline{A}\cdot\underline{X}=\underline{B}$ a budeme ji řešit vynásobením obou stran rovnice inverzní maticí $\underline{A}^{-1}$ zleva: $\underline{A}^{-1}\cdot\underline{A}\cdot\underline{X}=\underline{A}^{-1}\cdot\underline{B}$, takže $\underline{X}=\underline{A}^{-1}\cdot\underline{B}$.

Určíme tedy matici $\underline{A}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & -9 & 15 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underline{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}=\underline{A}^{-1}\cdot\underline{B}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 19 & \frac{1}{2} \\ 23 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Zkouška:

$$\underline{A}\cdot\underline{X}=\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 19 & \frac{1}{2} \\ 23 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}=\underline{B}$$

Součin matic

Nechť je dána matice $\underline{A} = (a_{ik})$ typu (m,n) a matice $\underline{B} = (b_{ik})$ typu (n,p), obě nad týmž tělesem T. Součinem matic $\underline{A}$, $\underline{B}$ (v tomto pořadí!) nazýváme matici $\underline{C} = (c_{ik})$ typu (m,p) definovanou předpisem

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i = 1,2,\ldots,m,\ k = 1,2,\ldots,p.$$

Píšeme $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$. (Podmínku pro typy matic při násobení si můžeme zapamatovat pomocí formálního vztahu $(m,n)(n,p) = (m,p)$.) !!! Násobení matic není komutativní !!!

Příklad 11.

Určeme součin matic $\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad kde$$

$$a_{11} = 2.1 + 4.0 + (-1).(-3) = 5$$
$$a_{12} = 2.2 + 4.(-2) + (-1).6 = -10$$
$$a_{13} = 2.3 + 4.1 + (-1).(-3) = 13$$
$$a_{21} = 5.1 + (-2).0 + (-3).(-3) = 14$$
$$a_{22} = 5.2 + (-2).(-2) + (-3).6 = -4$$
$$a_{23} = 5.3 + (-2).1 + (-3).(-3) = 22$$
$$a_{31} = 4.1 + 0.0 + 1.(-3) = 1$$
$$a_{32} = 4.2 + 0.(-2) + 1.6 = 14$$
$$a_{33} = 4.3 + 0.1 + 1.(-3) = 9, \quad tedy$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -10 & 13 \\ 14 & -4 & 22 \\ 1 & 14 & 9 \end{pmatrix}}}$$

Záměnné matice

Jsou matice $\underline{A}, \underline{B}$, pro které platí $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A}$.

Frobeinova věta

soustava rovnic je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice soustavy $\underline{A} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$,

je rovna hodnosti matice rozšířené $\underline{A}_r = \left(\begin{array}{cc|c} * & * & * \\ * & * & * \end{array}\right)$.

Adjungované matice

Příklad 12.

Určeme adjungovanou matici *adj* $\underline{A}$ k matici $\underline{A}$.

$$\underline{A}=\begin{pmatrix}2&4&-1\\5&-2&-3\\4&0&1\end{pmatrix}$$

Adjungovanou matici *adj* $\underline{A}$ vypočítáme tak, že každý prvek matice $\underline{A}$ nahradíme jeho algebraickým doplňkem a takto získanou matici transponujeme:

$$adj\ \underline{A}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-2&-3\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}5&-3\\4&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&-2\\4&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}4&-1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\4&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&4\\4&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}4&-1\\-2&-3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-1\\5&-3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&4\\5&-2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-2&-17&8\\-4&6&16\\-14&1&-24\end{pmatrix}^T=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-2&-4&-14\\-17&6&1\\8&16&-24\end{pmatrix}}}$$

Inverzní matice

Buďte $\underline{A},\underline{B}$ čtvercové regulární matice stupně *n*. Řekneme, že $\underline{B}$ je inverzní matice k matici $\underline{A}$ nebo že $\underline{A}$ je inverzní maticí k matici $\underline{B}$, jestliže $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{B}\cdot\underline{A}=\underline{E}$, kde $\underline{E}$ je jednotková matice.

Příklad 13.

Určeme inverzní matici $\underline{A}^{-1}$ k matici $\underline{A}$.

$$\underline{A}=\begin{pmatrix}2&3&0\\0&1&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\-1&2&0&0&0&1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&7&0&1&0&2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&7&1&-7&2\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\0&7&0&1&0&2\\0&0&7&1&-7&2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}14&0&0&4&0&-6\\0&7&0&1&0&2\\0&0&7&1&-7&2\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}7&0&0&2&0&-3\\0&7&0&1&0&2\\0&0&7&1&-7&2\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{7}&0&-\frac{3}{7}\\0&1&0&\frac{1}{7}&0&\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{1}{7}&-\frac{7}{7}&\frac{2}{7}\end{array}\right)\Rightarrow\ \underline{A}^{-1}=\underline{\underline{\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2&0&-3\\1&0&2\\1&-7&2\end{pmatrix}}}$$

Příklad 14.
Určeme inverzní matici $\underline{A}^{-1}$ k matici $\underline{A}$.

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení 1 Zjistíme determinant dané matice a matici adjungovanou. Je-li determinant nenulový, platí vztah

$$\underline{A}^{-1}=\frac{adj\ \underline{A}}{\det \underline{A}}.$$

$\det \underline{A}$ vypočteme snadno pomocí Sarrusova pravidla:

$$\det \underline{A}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-4+0-48-8-0-20=-80,$$

výpočet *adj* $\underline{A}$ je uveden v předchozím příkladě,
proto

$$\underline{\underline{\underline{A}^{-1}=-\frac{1}{80}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ -17 & 6 & 1 \\ 8 & 16 & -24 \end{pmatrix}}}.$$

Řešení 2 Pomocí jednotkové matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & -40 & 0 & -9 & 2 & -3 \\ 0 & 240 & 0 & 51 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} -120 & 0 & 0 & -3 & -6 & -21 \\ 0 & 240 & 0 & 51 & -18 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{120} & \frac{6}{120} & \frac{21}{120} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{240} & \frac{18}{240} & \frac{3}{240} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{array}\right)$$

$$\underline{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{120} & \frac{6}{120} & \frac{21}{120} \\ -\frac{51}{240} & \frac{18}{240} & \frac{3}{240} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}=\underline{\underline{-\frac{1}{80}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -14 \\ -17 & 6 & 1 \\ 8 & 16 & -24 \end{pmatrix}}}$$

Zkoušku správnosti lze provést ověřením platnosti vztahu $\underline{A}\cdot\underline{A}^{-1}=\underline{A}^{-1}\cdot\underline{A}=\underline{E}$, kde $\underline{E}$ je jednotková matice.

Příklad 15.
Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 \; + 3x_2 \qquad &= 1 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 \; + 2x_2 \qquad &= 2 \end{aligned}$$

Jedná se o soustavu tří rovnic o třech neznámých, přičemž determinant matice soustavy

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$$

takže soustava má právě jedno řešení.

Řešení 1 Úpravou rozšířené matice soustavy (Gaussova eliminační metoda):

$$\underline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \end{array}\right)$$

Znovu jsme se přesvědčili, že soustava je řešitelná, neboť $h(\underline{A}) = h(\underline{A}') = 3$ (Frobeinova věta; $\underline{A}'$ je matice rozšířená) a $h(\underline{A}) = n$ (n počet neznámých), takže řešení je právě jedno.

Z poslední upravené rovnice vidíme, že $7x_3 = 12$, takže $x_3 = \frac{12}{7}$. Podobně $x_2 = \frac{5}{7}$, $x_1 = -\frac{4}{7}$.

Řešení 2 Užitím Cramerova pravidla:

$$x_i = \frac{\det \underline{A}_i}{\det \underline{A}},$$

kde matice $\underline{A}_i$ vznikne z $\underline{A}$ nahrazením *i*-tého sloupce pravými stranami soustavy.
Takže

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-4}{7}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{7} = \frac{5}{7}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{12}{7}$$

Řešení 3 Pomocí inverzní matice $\underline{A}^{-1}$ k matici soustavy $\underline{A}$:
Danou soustavu lze přepsat ve tvaru rovnice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Řešení této rovnice určíme tak, že vynásobíme zleva obě strany rovnice maticí $\underline{A}^{-1}$ inverzní k matici $\underline{A}$.
Známým způsobem (inverzní matice) zjistíme, že

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proto po dosazení do rovnice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & -1 & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Odsud vidíme, že $x_1 = -\frac{4}{7}, \quad x_2 = \frac{5}{7}, \quad x_3 = \frac{12}{7}$.

Pamatujme:

„Matematika je jen tehdy mocným nástrojem, když spolu s ní se zavádí něco nového, když vůbec do hloubky vnímá jak fyziku, tak i matematiku, když užívá právě ty metody, které jsou pro daný případ nutné.

Zkouší-li bezmyšlenkovitě aplikovat matematický aparát a snaží-li se kompenzovat nedostatek pochopení podstaty věci matematickými formulemi, pak má stejně malou pravděpodobnost, že se dobere výsledku, jako má dítě začínající mluvit, že napíše báseň."

A.N. Krylov

Permutace, determinanty a jejich užití

Pořadí prvků

Buď n přirozené číslo. Pořadím prvků $1,2,....,n$ rozumíme každou uspořádanou n-tici $(i_1, i_2, ..., i_n)$ prvků $1,2,....,n$, kde se každý z prvků $1,2,....,n$ vyskytuje právě jednou.

Inverze v pořadí

Inverzí v pořadí $(i_1, i_2, ..., i_n)$ rozumíme každou dvojici čísel i_r, i_s takovou , že $r < s$ a zároveň $i_r > i_s$ (tj. větší číslo se v pořadí vyskytuje před menším číslem).

Permutace

Permutací π množiny $\{1,2,...,n\}$ rozumíme každou bijekci množiny $\{1,2,...,n\}$.
Permutací π zapisujeme pomocí matice typu $(2,n)$ tvaru

$$\begin{pmatrix} i_1, i_2, ..., i_n \\ j_1, j_2, ..., j_n \end{pmatrix},$$

ve které první řádek nazýváme pořadím vzorů, druhý řádek pořadím obrazů a pro každé $x \in \{1,2,...,n\}$ je $\pi(i_x) = j_x$. Množinu všech permutací množiny $\{1,2,...,n\}$ značíme S_n.
Inverzní zobrazení π^{-1} k permutaci π nazýváme inverzní permutací k permutaci π. Říkáme, že permutace je v základním tvaru, jestliže pořadí vzorů je $(1,2,...,n)$.

Inverzní permutace

Inverzní permutaci vytvoříme výměnou řádků.

Znaménko permutace π

Znaménkem permutace π rozumíme celé číslo $(-1)^{k+m}$, kde k je počet všech inverzí v pořadí vzorů a m počet všech inverzí v pořadí obrazů. Znaménko permutace π značíme $sign\ \pi$. Je-li $sign\ \pi = 1$ řekneme, že permutace π je sudá, pokud $sign\ \pi = -1$ je permutace π lichá.

Příklad 16.

Určeme znaménko permutace $\begin{pmatrix} 3,4,1,2 \\ 1,4,3,2 \end{pmatrix}$.

Můžeme postupovat dvěma způsoby. Buď určíme počet inverzí v pořadí vzorů a v pořadí obrazů (a), nebo nejprve zapíšeme permutaci v základním tvaru (b). Tedy

a) inverze v pořadí vzorů: $(3,4,1,2)$ $\quad 2+2+0+0=4$

inverze v pořadí obrazů $(1,4,3,2)$ $\quad 0+2+1+0=3$

Znaménko permutace je $(-1)^{4+3} = -1$

b) permutace zapsaná v základním tvaru je $\begin{pmatrix} 1,2,3,4 \\ 3,2,1,4 \end{pmatrix}$. Inverzí v pořadí vzorů je tedy 0 a v pořadí obrazů $2+1+0+0=3$, proto znaménko permutace je $(-1)^3 = -1$.

Determinant matice A

Buď $\underline{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice n-tého řádu nad tělesem T. Determinantem matice $\underline{A}$ rozumíme prvek (číslo) $\det \underline{A}$ z tělesa T, pro který platí:

$$\det \underline{A} = \sum_{\pi \in S_n} sign \begin{pmatrix} 1, & 2, \dots, n \\ s_1, s_2, \dots, s_n \end{pmatrix} a_{1s_1} a_{2s_2} \dots a_{ns_n} .$$

Jsou-li $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ řádkové (resp. sloupcové) vektory matice $\underline{A}$, píšeme místo $\det \underline{A}$ též $\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$.

Jinak definováno: Determinantem n-tého stupně matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazýváme číslo

$$\det \underline{A} = \sum (-1)^r \, a_{1k1} a_{2k2} \dots a_{nkn} ,$$

kde se sčítá přes všechny permutace $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ čísel $1,2,\dots,n$ a kde r udává počet inverzí v permutaci $(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

- Determinant matice $\underline{A}$ je součet součinů; v každém součinu se vyskytuje z každého řádku i sloupce právě jeden prvek. Na druhé straně každý prvek řádku či sloupce se vyskytuje aspoň v jednom sčítanci.
- Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.
- Vznikne-li matice $\underline{B}$ ze čtvercové matice $\underline{A}$ n-tého řádu výměnou dvou řádků, resp. sloupců, potom $\det \underline{B} = -\det \underline{A}$.
- Platí $\det \underline{A} = \det \underline{A}^{\mathrm{T}}$.
- Věta o součtu determinantů:
  $\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i + \underline{b}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n) = \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n) + \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{b}_i, \dots, \underline{a}_n)$
- Věta o vytýkání konstanty ze řádku:
  $\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \alpha \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n) = \alpha \cdot \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{i-1}, \underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}, \dots, \underline{a}_n)$
- Buď $\underline{A}$ čtvercová matice stupně n. Jestliže matice $\underline{B}$ vznikne z matice $\underline{A}$ vynásobením libovolného řádku prvkem $c \in T$, pak $\det \underline{B} = c \cdot \det \underline{A}$.
- Věta o součinu dvou determinantů
  $\det(\underline{A}\underline{B}) = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}$
- Hodnota determinantu se nezmění, jestliže k danému řádku, resp. sloupci přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků, resp. sloupců.
- Determinant regulární (singulární) matice je vždy různý od nuly (roven nule).

Příklad 17.

Spočtěme determinant pátého stupně

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 5 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{2}{=} - \begin{vmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{1}{=}$$

$$\stackrel{1}{=} - \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -6 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

1. elementární transformace sloupců matice
2. (Lapleceův) rozvoj podle prvního řádku

Minor (subdeterminant)

Minorem (subdeterminantem) M_{ij} z čtvercové matice $\underline{A}$ příslušným prvku a_{ij} rozumíme determinant matice, která vznikne z matice $\underline{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Buď $\underline{A} = (a_{ij})$ matice typu (m,n). Každou matici $\underline{B}$, která vznikne z $\underline{A}$ vynecháním některých (libovolných) řádků a některých sloupců, nazýváme dílčí maticí matice $\underline{A}$. Determinant každé čtvercové dílčí matice nazýváme subdeterminantem matice $\underline{A}$.Je-li $\underline{A}$ čtvercová matice stupně n, pak vynecháním libovolných k řádků, $k < n$, a libovolných k sloupců z matice $\underline{A}$ dostaneme dílčí čtvercovou matici stupně $n-k$. Determinant každé takové dílčí matice nazýváme subdeterminantem matice $\underline{A}$ stupně $n-k$. Subdeterminant stupně $n-1$ vzniklý vynecháním *i*-tého řádku a *j*-tého sloupce označíme M_{ij}. Prvek $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ nazýváme algebraickým doplňkem prvku a_{ij}.

Cramerovo pravidlo

Je-li matice $\underline{A}$ regulární, pak rozšířená matice má právě jedno řešení, jež se vypočítá

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde matice A_i vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce pravými stranami.

Příklad 18.

Pomocí Cramerova pravidla řešme soustavu

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & +3x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & +5x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 6 \end{array}$$

$$\det \underline{A} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{3+1}(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1-(-3) = \underline{\underline{2}}$$

$$\det \underline{A}_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3}(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 12 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+3} 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 6-4 = \underline{\underline{2}}$$

$$\det \underline{A}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & -1 & 2 \\ 8 & 12 & -3 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-1)^{1+3}(-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2-(-4) = \underline{\underline{2}}$$

$$\det \underline{A}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 5 & 12 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2}}; \qquad \det \underline{A}_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-2}}$$

$$x_1 = \frac{\det \underline{A}_1}{\det \underline{A}} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}, \quad x_2 = \frac{\det \underline{A}_2}{\det \underline{A}} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}, \quad x_3 = \frac{\det \underline{A}_3}{\det \underline{A}} = \underline{\underline{-1}}, \quad x_4 = \frac{\det \underline{A}_4}{\det \underline{A}} = \underline{\underline{-1}}$$

Zkouška:

$$L_1 = 2\cdot 1 + 2\cdot 1 - (-1) + (-1) = 4, \quad P_1 = 4, \quad L_1 = P_2$$

$$L_2 = 4\cdot 1 + 3\cdot 1 - (-1) + 2(-1) = 6, \quad P_2 = 6, \quad L_2 = P_2$$

$$L_3 = 8\cdot 1 + 5\cdot 1 - 3(-1) + 4(-1) = 12, \quad P_3 = 12, \quad L_3 = P_3$$

$$L_4 = 3\cdot 1 + 3\cdot 1 - 2(-1) + 2(-1) = 6, \quad P_4 = 6, \quad L_4 = P_4$$

Vektorový prostor

Vektorový prostor

Nechť T je těleso, V množina. Uspořádanou trojici $(V,+,\cdot)$, kde + je vnitřní operace na V (tj. zobrazení $V \times V \to V$), $\cdot$ vnější operace na V nad T (tj. zobrazení $T \times V \to V$), nazveme vektorovým prostorem nad tělesem T, jestliže:

a $(V,+)$ je komutativní grupa,

b vnější operace $\cdot$ splňuje tyto podmínky:

$$\forall \alpha \in T\ \forall a,b \in V : \alpha.(a+b) = \alpha.a + \alpha.b,$$
$$\forall \alpha,\beta \in T\ \forall a \in V : (\alpha+\beta).a = \alpha.a + \beta.a,$$
$$\forall \alpha,\beta \in T\ \forall a \in V : (\alpha.\beta).a = \alpha.(\beta.a),$$
$$\forall a \in V : 1.a = a \ \ (1 \text{ je jednotkový prvek z } T)$$

Ve vektorovém prostoru $V(T)$ platí:

a $\forall a \in V : 0 \cdot a = 0$ (0 je nulový skalár)

b $\forall \alpha \in T : \alpha \cdot 0 = 0$

c $\alpha \cdot a = 0 \Leftrightarrow (\alpha = 0 \vee a = 0)$

d $\forall a \in V : -a = (-1) \cdot a$

- Nejjednodušším příkladem vektorového prostoru je tzv. triviální nebo nulový vektorový prostor $\{0\}$, skládající se pouze z nulového vektoru.

Příklad 19. Příklady vektorových prostorů

1. Těleso T spolu s operacemi sčítání a násobení definovanými na T je vektorový prostor nad T.
2. Speciálně těleso reálných čísel je vektorový prostor nad R (reálný vektorový prostor)
3. Množina P všech kladných reálných čísel spolu s operacemi $\circ$ a $\bullet$, kde $\underline{u} \circ \underline{v} = \underline{uv}, \quad r \bullet \underline{u} = \underline{u}^r, \quad \underline{u}, \underline{v} \in P, r \in R$, je reálný vektorový prostor
4. Na množině T^n všech uspořádaných n-tic prvků z T definujeme operace
   $(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$
   $r\,(a_1, a_2, ..., a_n) = (ra_1, ra_2, ..., ra_n)$
   Množina T^n je pak vektorovým prostorem nad T, který nazýváme aritmetickým vektorovým prostorem nad T.

Vektorový podprostor

Nechť W je neprázdná podmnožina vektorového prostoru $(V,+,\cdot)$. Uspořádanou trojici $(W,+,\cdot)$ nazveme (vektorovým) podprostorem prostoru $V(T)$, jestliže platí:

a $\forall a,b \in W : a + b \in W$

b $\forall \alpha \in T\ \forall a \in W : a \cdot \alpha \in W$

Průnik libovolného neprázdného systému podprostorů vektorového prostoru V je opět podprostorem prostoru V.

Lineární obal

Def.I Nechť $a_1, a_2, ..., a_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $V(T)$. Množinu

$$M = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in T\}$$

nazýváme podprostorem (lineárním obalem) generovaným vektory $a_1, a_2, ..., a_n$ a značíme $[a_1, a_2, ..., a_n]$. O množině $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ říkáme, že generuje množinu M nebo že je to množina generátorů podprostoru *M*.

Def.II Buď M podmnožina vektorového prostoru V. Průnik všech podprostorů prostoru V, obsahujících množinu M, nazýváme lineárním obalem množiny M a značíme $[M]$.

• Buď M podmnožina vektorového prostoru V. Pak platí:

a) je-li $M = 0$, je $[M] = 0$

b) je-li $M \neq 0$, pak $[M]$ je množina všech lineárních kombinací $\sum_{i=1}^{n} r_i \underline{u}_i$, kde $\underline{u}_i \in M, i = 1,2,...,n$.

Úpravy generátorů

Nechť $a_1, a_2, ..., a_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $V_n(T)$, $M = [a_1, a_2, ..., a_n]$. Provedeme-li na skupinu vektorů $a_1, a_2, ..., a_n$ některou z následujících změn, dostaneme novou skupinu vektorů, která generuje stejný podprostor M:

a) změna pořadí vektorů,

b) nahrazení libovolného vektoru z M jeho α-násobkem, kde $\alpha \in T, \alpha \neq 0$,

c) nahrazení libovolného vektoru z M jeho součtem s lineární kombinací ostatních vektorů z M,

d) vynechání vektoru, který je lineární kombinací ostatních vektorů,

e) přidání vektoru, který je lineární kombinací vektorů z M.

Steinitzova věta

Nechť vektory $a_1, a_2, ..., a_n$ generují vektorový prostor $V(T)$. Nechť vektory $b_1, b_2, ..., b_k$ z $V(T)$ jsou lineárně nezávislé. Pak platí:

a) $k \leq n$

b) existuje $n-k$ vektorů a_i z $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, které spolu s vektory $b_1, b_2, ..., b_k$ generují $V(T)$.

Konečněrozměrný vektorový prostor

Jestliže existují vektory $a_1, a_2, ..., a_k \in V(T)$ takové, že $V(T) = [a_1, a_2, ..., a_n]$, je tento prostor konečněrozměrný.

Báze

Nechť $V(T)$ je konečněrozměrný prostor. Podmnožinu $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset V(T)$ nazveme bází vektorového prostoru $V(T)$, jestliže platí:

a) $a_1, a_2, ..., a_n$ jsou lineárně nezávislé,

b) $[a_1, a_2, ..., a_n] = V(T)$, tj. generují $V(T)$

Dimenze

Nechť $V(T)$ je konečněrozměrný vektorový prostor. Dimenzí nenulového prostoru $V(T)$ nazýváme počet prvků některé jeho báze. Dimenze nulového vektorového prostoru je 0. Dimenze nekonečněrozměrného vektorového prostoru je ∞. Dimenzi vektorového prostoru $V(T)$ značíme $\dim V(T)$.

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

Označme B skupinu vektorů $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ v tomto pořadí a nechť B je báze vektorového prostoru $V(T)$, $a \in V(T)$. Uspořádanou *n*-tici skalárů $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ takovou, že platí

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n,$$

nazýváme souřadnicemi vektoru $\underline{a}$ vzhledem k bázi B. Píšeme

$$\underline{a}_{\mathrm{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

Součet podprostorů

$\underline{a}$ Nechť U, W jsou podprostory vektorového prostoru $V(T)$. Podprostor $U + W$ nazýváme **lineárním součtem** podprostorů U, W.

$\underline{b}$ Nechť $U \cap W = \{0\}$. Potom lineární součet $U + W$ nazýváme **direktním součtem** podprostorů U, W a píšeme $U \oplus W$.

- Nechť $U = [a_1, a_2, ..., a_n]$, $W = [b_1, b_2, ..., b_k]$ jsou podprostory vektorového prostoru $V(T)$. Pak platí: $U + W = [a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_k]$
- Nechť U, W jsou podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru $V(T)$. Pak platí: $\dim U + \dim W = \dim (U + W) + \dim (U \cap W)$

Příklad 20.

Rozhodněme, zda množina W tvoří podprostor vektorového prostoru $V_3(R)$.

$$W = \{(x, y, 1) \in V_3(R)\}$$

Musíme ověřit podmínky vektorového podprostoru.

$$(\ 0,0,0\ ) \in W \Rightarrow W \neq 0$$
$$(x_1, y_1, 1\ ) + (x_1, y_1, 1\ ) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 2) \notin W$$
$$\alpha\,(x, y, 1) = (\alpha\, x, \alpha\, y, \alpha) \notin W$$

tedy W netvoří podprostor vektorového prostoru $V_3(R)$.

Příklad 21.

Určeme bázi a dimenzi vektorového prostoru generovaného vektory

$$\underline{u}_1 = (2,0,1,3,-1),\ \underline{u}_2 = (1,1,0,-1,1),\ \underline{u}_3 = (0,-2,1,5,-3),\ \underline{u}_4 = (1,-3,2,9,-5)$$

z aritmetického vektorového prostoru R^5.

Nejprve zjistíme, zda vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ nejsou lineárně nezávislé, tj. zda netvoří bázi daného vektorového prostoru. Řešíme tedy rovnici $c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2 + c_3\underline{u}_3 + c_4\underline{u}_4 = \underline{0}$, kterou lze přepsat na soustavu

$$\begin{array}{rrrrcl}
2c_1 & +c_2 & & +c_4 & = & 0 \\
 & c_2 & -2c_3 & -3c_4 & = & 0 \\
c_1 & & +c_3 & +2c_4 & = & 0 \\
3c_1 & -c_2 & +5c_3 & +9c_4 & = & 0 \\
-c_1 & +c_2 & -3c_3 & -5c_4 & = & 0
\end{array}$$

Užitím Gaussovy eliminační metody zjistíme, že tato soustava je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{array}{rrrrcl}
-c_1 & +c_2 & -3c_3 & -5c_4 & = & 0 \\
 & c_2 & -2c_3 & -3c_4 & = & 0
\end{array}$$

která má zřejmě nekonečně mnoho řešení závislých na 2 parametrech.
Množinu všech řešení soustavy lze zapsat např. ve tvaru

$$\{(-c_3 - 2c_4, 2c_3 + 3c_4, c_3, c_4); c_3, c_4 \in R\}.$$

To znamená, že např. pro $c_3 = c_4 = 1$ je $(-3,5,1,1)$ jedním z řešení soustavy, takže $-3\underline{u}_1 + 5\underline{u}_2 + \underline{u}_3 + \underline{u}_4 = \underline{0}$. Vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ jsou tedy lineárně závislé a bází daného vektorového prostoru netvoří. Podobně i vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_4$ jsou lineárně závislé, neboť $-2\underline{u}_1 + 3\underline{u}_2 + \underline{u}_4 = \underline{0}$. Vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2$ jsou již lineárně nezávislé, protože $k_1\underline{u}_1 + k_2\underline{u}_2 = \underline{0}$ právě tehdy, když $k_1 = k_2 = 0$.
Množina $\mathrm{B} = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\} = \{(2,0,1,3,-1),(1,1,0,-1,1)\}$ je tedy bází daného vektorového prostoru a jeho dimenze je rovna 2.

Jinou bázi téhož vektorového prostoru určíme jednodušším způsobem úpravou matice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 9 & -5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 10 & -6 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \underline{A}^*$$

Řádky matice $\underline{A}^*$ jsou lineárně nezávislé vektory, které tvoří bázi daného vektorového prostoru.

Euklidovské vektorové prostory

Euklidovský vektorový prostor

Vektorový prostor $(E,+,\cdot)$ nad R nazýváme euklidovským vektorovým prostorem, jestliže existuje zobrazení $g: E\times E \to R$ takové, že pro libovolné vektory $a,b,c \in E$ a libovolné reálné číslo α platí:

$\underline{a}$ $g(a,b)=g(b,a)$

$\underline{b}$ $g(a+b,c)=g(a,c)+g(b,c)$

$\underline{c}$ $g(\alpha\, a,c)=\alpha\, g(a,c)$

$\underline{d}$ $g(a,a)\geq 0,\ g(a,a)=0 \Leftrightarrow a=0$

Zobrazení g nazýváme skalárním součinem.

Úmluva: Euklidovský vektorový prostor $(E,+,\cdot)$ se skalárním součinem g budeme v dalším textu značit (E,g).

V euklidovském vektorovém prostoru (E,g) platí:

$\underline{a}$ $\|\alpha\, a\| = |\alpha|\,\|a\|$

$\underline{b}$ $\|a\|\geq 0;\quad \|a\|=0 \Leftrightarrow a=0$

$\underline{c}$ $|g(a,b)|\leq \|a\|\,\|b\|$ (Schwartzova nerovnost)

$\underline{d}$ $\|a+b\|\leq \|a\|\,\|b\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Velikost vektorů a jimi sevřeného úhlu

Nechť (E,g) je euklidovský vektorový prostor, $a,b\in E$.
Délkou (velikostí, normou) vektoru a nazýváme reálné číslo

$$\|a\| = \sqrt{g(a,a)}.$$

Velikost ρ úhlu mezi vektory a,b definujeme takto:

$$\cos\rho = \frac{g(a,b)}{\|a\|\cdot\|b\|} \text{ pro } a\neq 0, b\neq 0,\ \rho\in\langle 0,\pi\rangle$$

$$\cos\rho = 0 \text{ pro } a=0 \text{ nebo } b=0.$$

Jestliže platí $\cos\rho=0$, nazýváme vektory a,b kolmými (ortogonálními) a píšeme $a\perp b$.

Ortogonální doplněk

Nechť (E,g) je euklidovský vektorový prostor, M podmnožina E. Ortogonálním doplňkem množiny M nazýváme množinu

$$M^{\perp} = \{a\in E; \forall b\in M: a\perp b\}$$

Vektory ortogonální a ortonormální

Nechť $a_1, a_2,\dots, a_k$ jsou vektory z euklidovského vektorového prostoru (E,g).
Vektory $a_1, a_2,\dots, a_k$ nazýváme ortogonálními, jestliže $a_i \perp a_j$ pro všechna $i\neq j$. Vektory $a_1, a_2,\dots, a_k$ nazýváme ortonormální, jestliže jsou navzájem ortogonální a $\|a_i\|=1,\quad 1\leq i\leq k$.

Ortogonální (ortonormální) báze

Nechť (E, g) je *n*-rozměrný euklidovský vektorový prostor, $\mathrm{B} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ jeho báze. Jsou-li vektory $a_1, a_2, ..., a_n$ navzájem ortogonální, resp. ortonormální, nazýváme B ortogonální, resp. ortonormální bází.

Příklad 22.

Nechť V je podprostor aritmetického vektorového prostoru R^3 se skalárním součinem takový, že

$$V = [\{(2,1,3),(4,2,0)\}].$$

Určeme: [a] ortogonální bázi ve V, která není ortonormální
[b] ortogonální doplněk $V^\perp$ v prostoru R^3
[c] ortonormální bázi ve V
[d] ortonormální bázi ve $V^\perp$.

---

[a] Vektory $\underline{u}_1 = (2,1,3)$ a $\underline{u}_2 = (4,2,0)$, které generují vektorový prostor V, jsou zřejmě lineárně nezávislé, takže množina $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ je bází tohoto podprostoru. Tato báze však není ortogonální, neboť $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 2.4 + 1.2 + 3.0 = 10 \neq 0$. Abychom dostali ortogonální bázi, nahradíme např. vektor $\underline{u}_2$ vektorem $\underline{w} \in V$ takovým, že $\underline{u}_1 \cdot \underline{w} = 0$.
Protože $\underline{w} \in V$, musí existovat čísla $a_1, a_2 \in R$ taková, že $\underline{w} = a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2$.
Platí tedy $\underline{u}_1 \cdot (a_1\underline{u}_1 + a_2\underline{u}_2) = 0$, takže $a_1.(\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1) + a_2.(\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2) = 0$.
K určení vektoru $\underline{w}$ stačí najít libovolné nenulové řešení této rovnice .
Proto zvolíme např. $a_2 = 1$.
Potom $a_1 = \dfrac{-(\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2)}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}$; po dosazení $a_1 = \dfrac{-(2,1,3)\cdot(4,2,0)}{(2,1,3)\cdot(2,1,3)} = -\dfrac{5}{7}$.
Hledaný vektor $\underline{w} = -\dfrac{5}{7}(2,1,3) + (4,2,0) = \underline{\underline{\left(\dfrac{18}{7}, \dfrac{9}{7}, -\dfrac{15}{7}\right)}}$.

Množina $\mathrm{B} = \{\underline{u}_1, \underline{w}\} = \left\{(2,1,3), \left(\dfrac{18}{7}, \dfrac{9}{7}, -\dfrac{15}{7}\right)\right\}$ je tedy ortogonální bází prostoru V, která není ortonormální, neboť např. $\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1 = 14 \neq 1$. Jinou ortogonální bází prostoru V, která není ortonormální je množina $\mathrm{B}' = \{(2,1,3),(6,3,-5)\}$.

[b] Ortogonálním doplňkem $V^\perp$ podprostoru V v prostoru R^3, je množina všech vektorů z R^3 ortogonálních na vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2$.
Tedy $V^\perp = \{\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \in R^3; \underline{u} \cdot (2,1,3) = 0 \wedge \underline{u} \cdot (4,2,0) = 0\}$.
Pro každý vektor $\underline{u} \in V^\perp$ tedy musí platit

$$\begin{aligned} 2u_1 + u_2 + 3u_3 &= 0 \\ 4u_1 + 2u_2 \quad\quad &= 0 \end{aligned}.$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru. Množinu řešení lze zapsat například ve tvaru

$$\{(u_1, -2u_2, 0), u_1 \in R\}.$$

Tedy $V^\perp = \underline{\underline{\{\underline{u} \in R^3; \underline{u} = (u_1, -2u_2, 0)\}}}$.

[c] Ortonormální bázi vektorového prostoru V získáme např. z báze
$B' = \{\underline{u}_1, \underline{w}'\} = \{(2,1,3),(6,3,-5)\}$, která je pouze ortogonální tak, že z vektorů $\underline{u}_1, \underline{w}'$ vytvoříme vektory jednotkové:

$$\frac{\underline{u}_1}{|\underline{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}} \cdot \underline{u}_1 = \frac{1}{14} \cdot (2,1,3)$$

$$\frac{\underline{w}_1}{|\underline{w}_1|} = \frac{1}{\sqrt{\underline{w}_1 \cdot \underline{w}_1}} \cdot \underline{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{70}} \cdot (6,3,-5)$$

Množina $\left\{\frac{1}{14} \cdot (2,1,3), \frac{1}{70} \cdot (6,3,-5)\right\}$ je tedy ortonormální bází vektorového prostoru V.

[d] Vzhledem k tomu, že dimenze vektorového prostoru R^3 je rovna 3 a dimenze jejího podprostoru V je rovna 2, musí být dimenze podprostoru $V^{\perp}$ rovna $3 - 2 = 1$. To znamená, že libovolný nenulový vektor z $V^{\perp}$ tvoří bázi $V^{\perp}$. Uvažujme např. bázi $\{(1,-2,0)\}$. Tato báze zřejmě není ortonormální, neboť $(1,-2,0) \cdot (1,-2,0) = 5 \neq 1$. Ortonormální bázi bude tvořit jednotkový vektor z $V^{\perp}$, tedy vektor

$$\frac{1}{\sqrt{(1,-2,0) \cdot (1,-2,0)}} \cdot (1,-2,0) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)}}.$$

Ortonormální bází prostoru $V^{\perp}$ je tedy množina $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$.

Pamatujme:

„I kdyby byl naším údělem dlouhý život, bylo by nutné šetrně si rozdělit čas, aby stačil na nezbytné záležitosti. Jaké šílenství učit se zbytečnosti v tak velké časové tísni, v níž jsme."

Seneca

Lineární zobrazení, isomorfismus vektorových prostorů

Lineární zobrazení

Nechť $V(T)$, $V'(T)$ jsou vektorové prostory nad týmž tělesem T. Zobrazení $\rho : V \to V'$ se nazývá lineární zobrazení, jestliže pro libovolné $a, b \in V$, $\alpha \in T$ platí:

$\underline{a}$ $\rho(\underline{a}+\underline{b}) = \rho(\underline{a}) + \rho(\underline{b})$ (zobrazení se nazývá aditivní)

$\underline{b}$ $\rho(\alpha\,\underline{a}) = \alpha\,\rho(\underline{a})$ (zobrazení je homogenní)

- Obraz lineární kombinace vektoru z V je roven lineární kombinaci jejich obrazů se stejnými koeficienty.

Jádro a obraz zobrazení ρ

Nechť $\rho : V(T) \to V'(T)$ je lineární zobrazení. Množina $\ker \rho = \{a \in V; \rho(a) = o\}$ se nazývá jádro zobrazení ρ, množina $\mathrm{Im}\,\rho = \{b \in V'; \exists a \in V : \rho(a) = b\}$ se nazývá obraz zobrazení ρ.

- $\ker \rho$ je podprostor prostoru $V(T)$, $\mathrm{Im}\,\rho$ je podprostor prostoru $V'(T)$.
- Nechť $\rho : V(T) \to V'(T)$ je lineární zobrazení a V je konečně rozměrný prostor. Pak platí:

$$\dim(\ker \rho) + \dim(\mathrm{Im}\,\rho) = \dim V$$

- Nechť $\rho : V(T) \to V'(T)$ je lineární zobrazení a V je konečně rozměrný prostor. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

a) ρ je prosté b) $\ker \rho = \{o\}$ c) $\dim\,(\mathrm{Im}\,\rho) = \dim V$

Takto lineární algebra rozhodně nekončí, končí jen má práce.

Použitá literatura

Bican, L.: Lineární algebra, Praha 1979

Bican, L.: Lineární algebra v úlohách, Praha 1979

Kopecký, M. - Emanovský, P.: Sbírka řešených příkladů z algebry, Olomouc 1990

Liebl, P.: Maticová algebra, Praha 1977

Novotná, J. - Trch, M.: Algebra a teoretická aritmetika (Lineární algebra), Praha 1995

Novotná, J. - Trch, M.: Algebra a teoretická aritmetika (Základy algebry), Praha 1993

OBSAH